FİNAL SINAVI CEVAPLARI

Soru 1. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için,

(a) $\tan((1+i)(x+y)) = \dfrac{\tan z + i \tanh \overline{z}}{1 - i \tan z \tanh \overline{z}}$,

(b) $\operatorname{arctanh}(z) = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

olduğunu gösteriniz ve

(c) $\tanh(z) = i$ denkleminin köklerini $x + iy$ formunda elde ediniz.

Çözüm: $z = x + iy$ ve $\tan(iz) = i \tanh(z)$ olmak üzere

(a)

$$\begin{aligned}
\tan((1+i)(x+y)) &= \tan(x + iy + i(x - iy)) \\
&= \tan(z + i\overline{z}) \\
&= \frac{\tan z + \tan(i\overline{z})}{1 - \tan z \tan(i\overline{z})} \\
&= \frac{\tan z + i \tanh \overline{z}}{1 - i \tan z \tanh \overline{z}}
\end{aligned}$$

dir.

(b) $w = \tanh^{-1} z$ olmak üzere

$$z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
z\left(e^{2w} + 1\right) &= e^{2w} - 1 \\
e^{2w} &= \frac{z+1}{1-z} \\
2w \log e &= \log\left(\frac{z+1}{1-z}\right) \\
w &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{z+1}{1-z}\right)
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{z+1}{1-z}\right)$$

olur.

(c) Ters hiperbolik fonksiyonu her iki tarafa da uygularsak

$$z = \tanh^{-1} z = \tanh^{-1}(i).$$

(b) şıkkından

$$\begin{aligned}
\tanh^{-1}(i) &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \\
&= \frac{1}{2} \log(i)
\end{aligned}$$

bulunur. i için log tanımını $r = 1$ ve $\Theta = \pi/2$ ile kullanarak

$$\log(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

elde edilir. O halde $n \in \mathbb{Z}$ için.

$$z = \tanh^{-1}(i) = \frac{1}{2}\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

dir.

Soru 2. $u(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz ve harmonik eşleniğini bulunuz.

Çözüm:

(b) $u(x,y) = \ln\left(x^2-y^2\right)$, için

$$\begin{array}{ll} u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, & u_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \\ u_{xx} = \frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & u_{yy} = \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{array}$$

dir. Böylece

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{2\left(y^2-x^2\right)}{x^2+y^2} + \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} = 0.$$

bulunur. Yani u harmoniktir. Cauchy-Riemann eşitliklerinden

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y,$$

dir. $v_y = \frac{2x}{x^2+y^2}$ olduğundan

$$v = \int \frac{2x}{x^2+y^2} dy = 2\arctan\frac{y}{x} + g(x)$$

bulunur. Buradan

$$v_x = \frac{-2y}{x^2+y^2} + g'(x)$$

ve böylece $v_x = -u_y$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{-2y}{x^2+y^2} + g'(x) &= \frac{-2y}{x^2+y^2} \\ g'(x) &= 0 \\ g(x) &= c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan u fonksiyonunun harmonik eşleniği

$$v(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x}$$

foksiyonudur.

Soru 3. Aşağıda verilen γ eğrileri boyunca

$$\int_\gamma \bar{z} dz$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

(a) γ : pozitif yönlendirilmiş köşeleri $A = 0$, $B = 1+i$ ve $C = -2$ olan üçgen

(b) γ : pozitif yönlendirilmiş $|z-i| = 2$ çemberi

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned} \int_\gamma \bar{z} dz &= \int_{AB} \bar{z} dz + \int_{BC} \bar{z} dz + \int_{CA} \bar{z} dz \\ &= \int_0^1 \overline{t(1+i)} d(t(1+i)) \\ &\quad + \int_0^1 \overline{(1-t)(1+i)-2t} d((1-t)(1+i)-2t) \\ &\quad + \int_0^1 \overline{-2(1-t)} d(-2(1-t)) \\ &= \int_0^1 2t dt + \int_0^1 ((2i-4)+10t) dt + \int_0^1 4(t-1) dt \\ &= 1 + (2i-4) + 5 - 2 = 2i \end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \overline{i+2e^{it}} d\left(i+2e^{it}\right) = \int_0^{2\pi} 2i\left(-i+2e^{-it}\right)e^{it}dt = 8\pi i.$$

Soru 4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{(z+1)^7} dz$ b) $\int_{|z|=1} \frac{\sinh z}{(2z-z^2)^2} dz$ c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2-\sin x-\cos x} dx$

Çözüm:

(a) Cauchy integral formülü

$$f^{(n)}\left(z_0\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}} dz.$$

formülü kullanılırsa $f(z)=\sin z$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde analitik olduğundan

$$f^{(6)}(-1) = \frac{6!}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{(z-(-1))^{6+1}} = \frac{6!}{2\pi i}\int_C \frac{\sin z}{(z+1)^7}.$$

dir. Böylece $f^{(6)}(z) = -\sin z$ olduğundan

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+1)^7} = \int_C \frac{\sin z}{(z-(-1))^{6+1}} = -\frac{2\pi i}{6!}\sin(-1) = \frac{2\pi \sin(1)}{6!} i$$

olarak elde edilir.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{|z-2|=1} \frac{\sinh z}{\left(2z-z^2\right)^2} dz &= \int_{|z-2|=1} \frac{(\sinh z)(2-z)^{-2}}{z^2} dz \\ &= 2\pi i\left(\left(\sinh z\right)(z)^{-2}\right)'\Big|_{z=2} = \pi i\frac{8\cosh 2-4\sinh 2}{16}\end{aligned}$$

(c) $z=e^{ix}$ olmak üzere $dz = ie^{ix}dx, dx=-idz/z$ dir. Böylece $z_1 = (1+\sqrt{2}/2)+(1+\sqrt{2}/2)i$ ve $z_2 = (1-\sqrt{2}/2)+(1-\sqrt{2}/2)i$ ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2-(\cos x+\sin x)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)/2-\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)/(2i)} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-idz}{2z-\left(z^2+1\right)/2-\left(z^2-1\right)/(2i)} \\ &= (i-1)\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2(1+i)z+i} \\ &= (i-1)\int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)} \\ &= \frac{2\pi i(i-1)}{z_2-z_1} = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Soru 5.

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-8z+1} dz = \frac{-i\pi}{\sqrt{2}}$$

sonucunu kullanarak

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4-\cos\vartheta} d\vartheta$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-8z+1}dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{de^{i\vartheta}}{e^{2i\vartheta}-8e^{i\vartheta}+1} \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{e^{2i\vartheta}-8e^{i\vartheta}+1}d\vartheta \\
&= i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}-8}d\vartheta \\
&= -\frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4-\cos\vartheta}d\vartheta \\
&= -i\int_{0}^{\pi} \frac{1}{4-\cos\vartheta}d\vartheta
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4-\cos\vartheta}d\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$$

olarak elde edilir.