



Adı Soyadı:

İMZA

Numara:

Fen Fakültesi Matematik Bölümü

23/11/2022

MAT3013.1 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ I ARA SINAVI CEVAPLARI

Sınav Süresi: 75 Dakika

CEVAPLAR

Soru 1. (10 Puan) $E \subset \mathbb{C}$ olsun. E kümesini kapsayan en küçük **kapalı** kümeye E kümesinin **kapanışı** denir. E kümesini kapsayan en küçük küme \mathbb{C} ise, E kümesine **yoğundur** denir. E tarafından kapsanan en büyük **açık** kümeye E kümesinin **içi** denir.

Yukarıdaki paragrafta verilen boşluklara aşağıdaki anahtar kelimelerden uygun olanları yerleştirin.

sınır açık kapalı sayılabilir iç kompakt kapanış yoğun bağlantılı ayrık

Soru 2. (12 Puan) Aşağıda ifadesi verilen teoremi ispatlayınız.

" $(z_n) = (x_n) + i(y_n)$ kompleks dizisinin $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasına yakınsaması için gerekli ve yeterli şart (x_n) reel dizisinin x_0 noktasına ve (y_n) reel dizisinin y_0 noktasına yakınsamasıdır, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ için gerekli ve yeterli şart $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ olmasıdır."

İspat: Öncelikle, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ ifadesini limit tanımıyla yazalım:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |z_n - z_0| < \varepsilon$$

Burada, $|z_n - z_0|$ ifadesi kompleks sayıların arasındaki mesafeyi ifade eder. Ayrıca, $z_n = x_n + iy_n$ ve $z_0 = x_0 + iy_0$ olduğundan

$$|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

gerçeklenir. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ 'ı elde ederiz.

Diğer taraftan, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ böyle ki $\forall n \geq N, |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ve $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Bu ifadeleri kullanarak $|z_n - z_0|$ ifadesini ele alalım:

$$\begin{aligned} |z_n - z_0| &= \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Bu da $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ böyle ki $\forall n \geq N, |z_n - z_0| < \varepsilon$ 'ı gösterir, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 'a yakınsar.

Bu şekilde, limit tanımını kullanarak teorem ispatlanmış olur.

Soru 3. (12 Puan) $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ kümesi \mathbb{C} içinde kapalı bir kümedir. Gösteriniz.

Çözüm: $E^C = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x > 0\}$ kümesinin \mathbb{C} içinde açık bir küme olduğunu gösterelim.

$z \in E^C$ keyfi olsun. $r = \frac{\operatorname{Re} z}{2} > 0$ dir. Keyfi $\zeta \in D(z, \frac{\operatorname{Re} z}{2})$ için $\frac{\operatorname{Re} z}{2} > |\zeta - z| = |z - \zeta| \geq \operatorname{Re}(z - \zeta) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} \zeta$ veya $\operatorname{Re} \zeta > \operatorname{Re} z - \frac{\operatorname{Re} z}{2} = \frac{\operatorname{Re} z}{2} > 0$ olduğundan $\zeta \in E^C$ ve dolayısıyla $D(z, \frac{\operatorname{Re} z}{2}) \subset E^C$ dir. $z \in E^C$ keyfi ve $D(z, \frac{\operatorname{Re} z}{2}) \subset E^C$ olduğundan E^C, \mathbb{C} içinde açık bir kümedir. O halde E, \mathbb{C} içinde kapalı bir kümedir.

Soru 4. (a) (15 Puan) $\cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta)$ toplamını bulunuz.

(b) (15 Puan) $\left(\frac{\cot \vartheta + i}{\cot \vartheta - i}\right)^4 = \frac{\cot(4\vartheta) + i}{\cot(4\vartheta) - i}$ eşitliğini kanıtlayınız.

Çözüm:

(a)

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta) &= \operatorname{Re}(e^{i\alpha}) + \operatorname{Re}(e^{i(\alpha+\beta)}) + \dots + \operatorname{Re}(e^{i(\alpha+n\beta)}) \\
 &= \operatorname{Re}(e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+\beta)} + \dots + e^{i(\alpha+n\beta)}) \\
 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \left[1 + e^{i\beta} + \dots + e^{i(n\beta)}\right]\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} \frac{1 - e^{-i\beta}}{1 - e^{-i\beta}}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} \frac{1 - e^{-i\beta} - e^{i(n+1)\beta} + e^{i(n)\beta}}{2 - e^{i\beta} - e^{-i\beta}}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{i(\alpha+(n+1)\beta)} + e^{i(\alpha+n\beta)}}{1 - \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(\alpha) - \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + n\beta) - \cos(\alpha + (n+1)\beta)}{1 - \cos(\beta)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{-2 \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2 \sin\left(\alpha + n\beta - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\alpha + n\beta - \frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right] \\
 &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\cot \vartheta + i}{\cot \vartheta - i}\right)^4 &= \left(\frac{\cos \vartheta + i \sin \vartheta}{\cos \vartheta - i \sin \vartheta}\right)^4 \\
 &= \left(\frac{\cos(4\vartheta) + i \sin(4\vartheta)}{\cos(4\vartheta) - i \sin(4\vartheta)}\right) \\
 &= \frac{\cot(4\vartheta) + i}{\cot(4\vartheta) - i}
 \end{aligned}$$

- Soru 5.** (a) (12 Puan) $|z| - z = 2 + i$ denklemini sağlayan z karmaşık sayılarını bulunuz.
 (b) (12 Puan) $z^2 + (1 - i)z - 3i = 0$ kuadratik denklemini çözünüz.

Çözüm:

- (a) $z = x + iy$ olsun.

$$\begin{aligned} |z| - z &= 2 + i \\ |x + iy| - (x + iy) &= 2 + i \\ \sqrt{x^2 + y^2} - x - iy &= 2 + i \\ \sqrt{x^2 + y^2} - x &= 2, \quad -y = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} &= 2 + x, \quad y = -1 \\ x^2 + 1 &= 4 + 4x + x^2, \quad y = -1 \\ x &= -\frac{3}{4}, \quad y = -1 \end{aligned}$$

olduğundan $z = -\frac{3}{4} - i$ elde edilir.

- (b) $z^2 + (1 - i)z - 3i = 0$ kuadratik denklemini çözümleri $\Delta = (1 - i)^2 - 4(-3i) = 10i$ olmak üzere,

$$z_{1,2} = \frac{-(1 - i) \mp \sqrt{\Delta}}{2}$$

$w = \sqrt{\Delta}$ olmak üzere, $w^2 = \Delta = 10i = 10e^{i\frac{\pi}{2}}$ biçimindedir. $w_k = \sqrt{10}e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)}$, $k = 0, 1$ olmak üzere,

$$z_{1,2} = \frac{-(1 - i) \mp \sqrt{5}(1 + i)}{2}$$

- Soru 6.** (12 Puan) $f(z) = e^{e^z}$ fonksiyonun Cauchy-Riemann koşullarını sağladığını gösteriniz ve türevini bulunuz.

Çözüm: $z = x + iy$ olsun. Bu durumda

$$e^{e^{x+iy}} = e^{e^x(\cos(y) + i\sin(y))} = e^{e^x \cos(y)} (\cos(e^x \sin(y)) + i\sin(e^x \sin(y)))$$

bulunur. Buradan $u(x, y) = e^{e^x \cos(y)} \cos(e^x \sin(y))$ ve $v(x, y) = e^{e^x \cos(y)} \sin(e^x \sin(y))$ biçiminde tanımlanmak üzere,

$$u_x(x, y) = e^x \cos(y) e^{e^x \cos(y)} \cos(e^x \sin(y)) - e^x \sin(y) e^{e^x \cos(y)} \sin(e^x \sin(y)) = v_y(x, y)$$

ve

$$u_y(x, y) = -e^x \sin(y) e^{e^x \cos(y)} \cos(e^x \sin(y)) - e^x \cos(y) e^{e^x \cos(y)} \sin(e^x \sin(y)) = -v_x(x, y)$$

gerçeklenir. Böylece, Cauchy-Riemann koşulları sağlanır. Böylece türevi,

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x, y) - iv_x(x, y) \\ &= e^x (\cos(y) + i\sin(y)) e^{e^x \cos(y)} \cos(e^x \sin(y)) + ie^x (\cos(y) + i\sin(y)) e^{e^x \cos(y)} \sin(e^x \sin(y)) \\ &= e^x (\cos(y) + i\sin(y)) e^{e^x \cos(y)} (\cos(e^x \sin(y)) + i\sin(e^x \sin(y))) \\ &= e^x e^{iy} e^{e^x \cos(y)} e^{ie^x \sin(y)} \\ &= e^{x+iy} e^{e^{x+iy}} \\ &= e^z \cdot e^{e^z} \end{aligned}$$

elde edilir.